

MALÝ MAPLE MANUÁL

VYBRANÉ PROSTŘEDKY¹ PRO EKONOMICKÉ MODELOVÁNÍ SE SYSTÉMEM MAPLE

OBSAH

- ▶ Maple - stručná informace o systému a jeho vybraných vlastnostech
- ▶ Malý Maple manuál - orientace v pracovním prostředí systému, průvodce systémem pro cílené užití vybraných matematických metod při ekonomickém modelování, vizualizace, předdefinované procedury, prvky interaktivní výbavy systému aj.

1 SYSTÉM MAPLE

V současnosti existuje řada počítačových systémů, např. produkt Maple (<http://www.maplesoft.com/>) společnosti Maplesoft Inc., (Kanada), produkt MuPAD (<http://www.mupad.de/products/>) společnosti SciFace Software GmbH & Co. KG, (Německo), produkt Mathematica (<http://www.wolfram.com/>) společnosti Wolfram Research, Inc. (USA), produkt MathCAD (<http://www.ptc.com/appserver/mkt/products/home.jsp?k=3901>) společnosti PTC Corporate Headquarters, (USA) atd. (Hřebíček/Žižka 2007), které podporují matematické disciplíny a jejich aplikace v technických i společensko-vědních oborech. Vědecké výpočty tak sehrávají stále důležitější úlohu. Bouřlivě se rozvíjející prostředky informačních a komunikačních technologií (ICT) k jejich přítomnosti stále více přispívají.

Potřeba vědeckých výpočtů v ekonomii je dána především nutností řešit reálné problémy (které jsou popsány množstvím dat) v korespondenci s pravidly a zákony ekonomické teorie. „Ekonomické experimenty“ vesměs nelze řídit. Přitom potřebná data je třeba získat dostatečně přesně, časově i prostorově je efektivně zpracovat, analyzovat, vytyčenou ekonomickou problematiku tak kvalitně řešit. Získané výsledky přitom vhodně interpretovat, jevy přehledně vizualizovat, vizualizace dostupně moci modifikovat, animovat, příp. simulovat. Komplexnost řešení pak vyžaduje dostatečný prostor pro flexibilitu úvah, myšlenkovou kreativitu, ale i dosažitelnou komunikaci, informovanost apod., přitom je nezbytné skutečnosti chápat v širších souvislostech jakožto celistvý proces od počátku rodícího se problému až po zpětnou vazbu po jeho dořešení, často přístupem interdisciplinárního charakteru.

Produkt **Maple** kanadské počítačové společnosti **Maplesoft Inc.** v konkurenci kvalitních počítačových systémů zaujímá významné místo. Systém v průběhu svého třicetiletého vývoje (původně i na významných evropských vědeckých pracovištích) prošel celou řadou verzí. Jeho úspěšný profil lze sledovat nejen z uživatelské popularity ve světě, obliba jeho užívání roste i v ČR na mnoha institucích, vědeckých a vzdělávacích, zejména univerzitních pracovištích, ale také v praxi, v komerční sféře i státním sektoru, jak dokladuje řada odborných fór (Chvátalová 2008).

V roce 1997 byl založen **Český klub uživatelů systému Maple – CzMUG** (*Czech Maple User Group*) (<http://www.maplesoft.cz>), který podporuje spolupráci českých uživatelů, organizuje workshopy, kurzy a semináře, informuje o novinkách a akcích vztahujících se k Maple, prezentuje dovednosti a zkušenosti českých uživatelů Maple, zastupuje je i přímými

¹ Tato modifikovaná kapitola je součástí projektu MŠMT FRVŠ, č. 2413/2008 s názvem *Inovace v předmětu ekonometrie*, řešitelka RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D., FP VUT v Brně.

kontakty se společností Maplesoft. Významnou předností je jeho podpora tvůrčích aktivit pro výuku i praxi v českém jazyce. Výhodou je i jeho rozsáhlý, aktuální a systematický servis českým uživatelům (Chvátalová 2007).

Současná verze Maple 12 je třetí základní verzí ve své řadě, která vychází z nové filozofie pro ovládání systému. Na Obrázcích 1 až 4 je zachyceno web-prostředí společnosti Maplesoft² pro aplikace Maple 12.



Obrázek1: Vstupní brána webu společnosti Maplesoft pro systém Maple 12

Významnými vývojovými atributy systému Maple, které neoddiskutovatelně přispívají k jeho úspěchu, jsou časté dynamické a kontinuální inovace reagující na aktuální podněty uživatelů i praxe. Uvedme některé z nich³, (Hřebíček/Žižka 2007), (Hřebíček/Chvátalová 2008), (Chvátalová 2007), (Chvátalová 2008):

- ▶ stále se zvyšující **komplexnost systému** mající základ v podpoře aplikačních⁴, dokumentačních, komunikačních a prezentačních potřeb a aktivit uživatelů (zdokonalený *Zápisník* a *Dokument* jakožto standardní grafické rozhraní, výrazná expanze **komfortu pracovního prostředí**, zvyšování podílu uživatele na konkrétním vedení řešeného problému, podpora intuice a přirozené logiky při ovládání systému, proto není nutno konstruovat složité manuály, systém je tudíž dosažitelný i pro začínající uživatele, obsahuje řadu zabudovaných nápověd, prostředky rychlé navigace, vlastní prezentační mód aj.),

² Zdroj obrázků: <http://www.maplesoft.com>

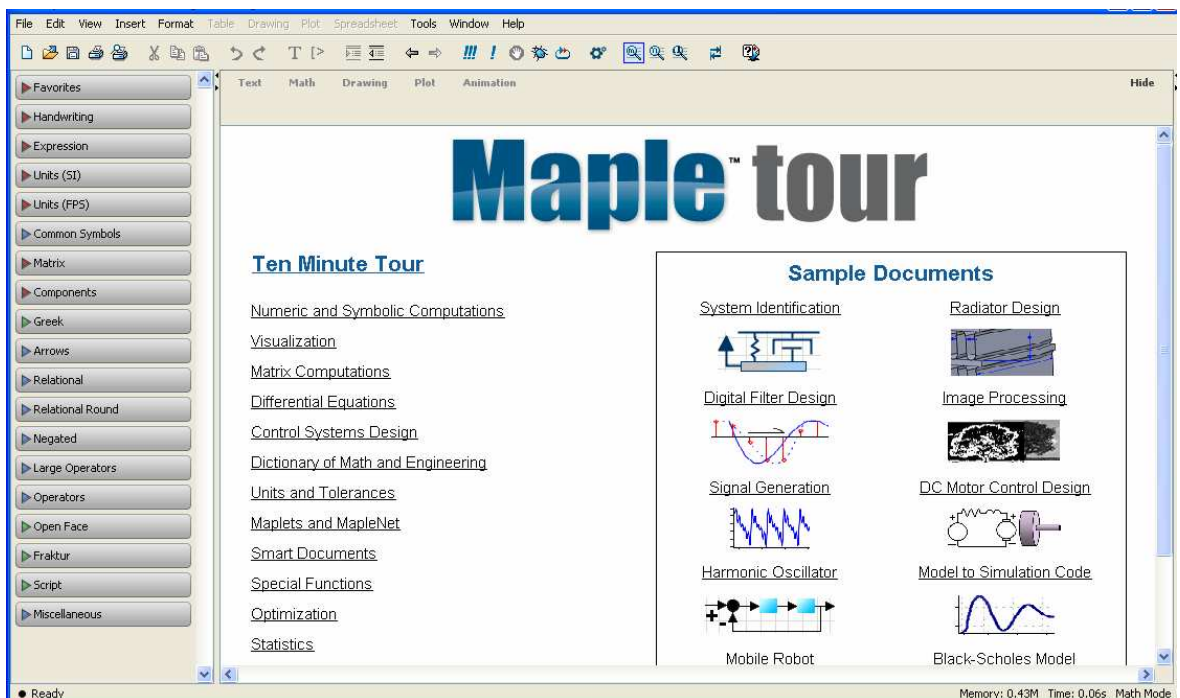
³ Zdroj: <http://www.maplesoft.cz>; <http://www.vladimirzak.com/sco2007.zip>

⁴ V současnosti je uloženo v Aplikačním centru Maplesoft (<http://www.maplesoft.com/applications/>) v sekci *Ekonomické modelování* téměř třicet *Zápisníků* s konkrétní řešenou ekonomickou problematikou pro možnost sdílení zkušeností a komunikace jejich autorů s jinými uživateli.



Obrázek 2: Vybrané tématické celky Aplikačního centra MapleSoft

- ▶ prohlubování **interaktivity** ve vztahu uživatel/system, uživatel/uživatel, uživatel/vývoj systému, uživatel + systém/ostatní ICT okolí, např.:
 - rozšíření exportovatelnosti (LaTeX, HTML, RTF, MathML), možnost prezentace „živých“ dokumentů na webu a převodu příkazů do jiných programovacích jazyků (Fortran, C, Java, Matlab, Vizual Basic atd.),
 - on-line semináře, webináře (www.maplesoft.webex.com), otevřené fórum uživatelů *Maple Primes*, Maple konference, doplňkové produkty *MapleConnect premier*, *MapleConnect*,



Obrázek 3: Maple Tour – cílená navigace a ukázky Dokumentů

- ▶ **posílení koexistence teorie a praxe** jako vzájemných komplementů, cílená strukturalizace systému a aktivit pro charakteristické skupiny, ať už v odbornosti nebo v spektru uživatelů (toolboxy konkrétních řešených problematik: např. *Maple Financial Modeling*, *Toolbox Maple Toolbox for Matlab*, *Global Optimization for Maple*, *Database Integration Toolbox* aj.) apod.

Professional TOOLBOX SERIES™

Maple Financial Modeling Toolbox

Multi-disciplinary environment for financial modeling and analysis
 The Maple™ Financial Modeling Toolbox complements Maple's multi-disciplinary environment with over 100 new commands, designed specifically for quantitative financial modeling and analysis. These can be combined with the existing Maple tools - including ODE and PDE solvers, statistical data analysis and optimization, to produce analytical applications and product prototypes in the Maple interactive document interface.

Application Areas

- ☑ Risk Analysis
- ☑ Portfolio Management
- ☑ Quantitative Analysis
- ☑ Model Validation/Vetting
- ☑ And more...

Modeling with Local Volatility

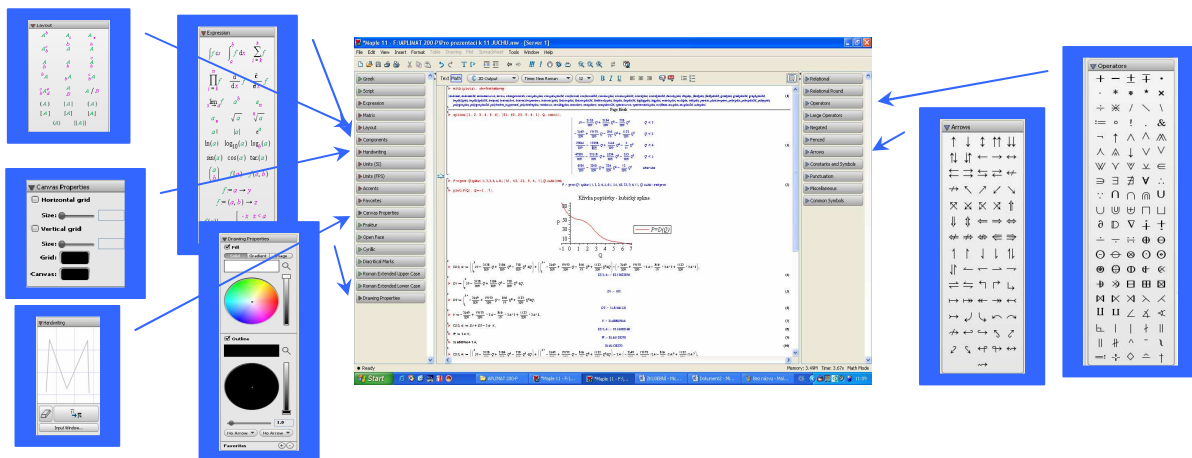
Simulating SVJJ Processes

Key Features

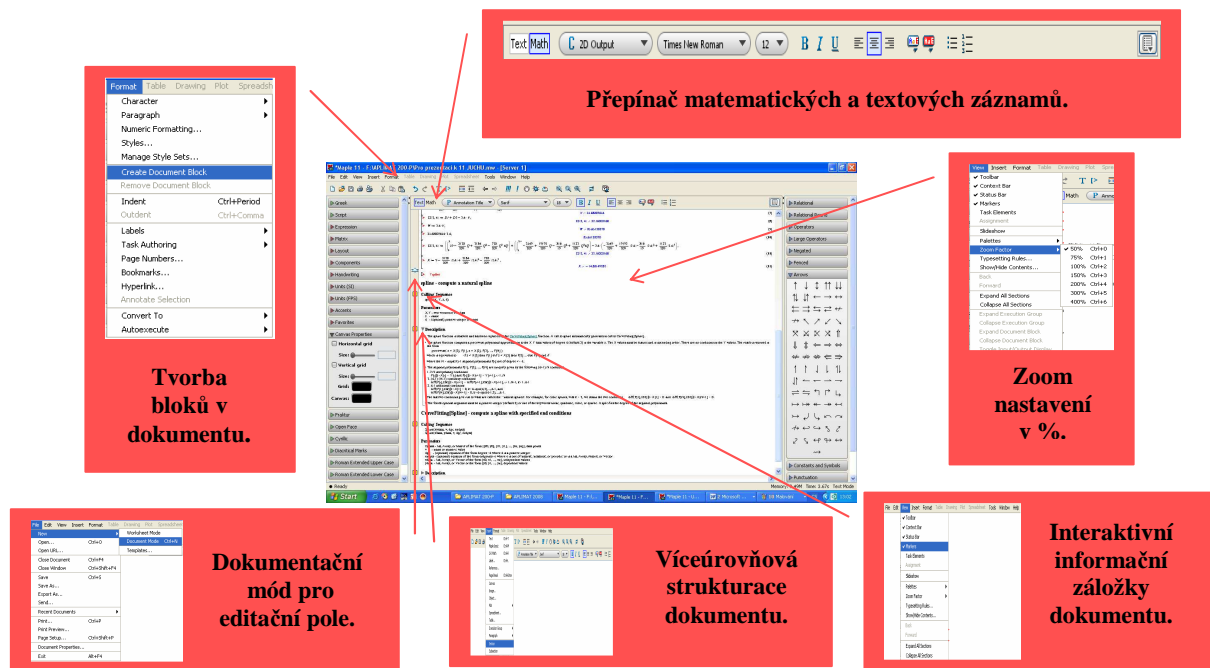
- Interactive technical document interface, with intuitive 2-D equation editor for capturing and reusing knowledge as an informational asset.
- Tools for creating and analyzing term structures of interest rates.

Obrázek 4: Toolbox „Finanční modelování“

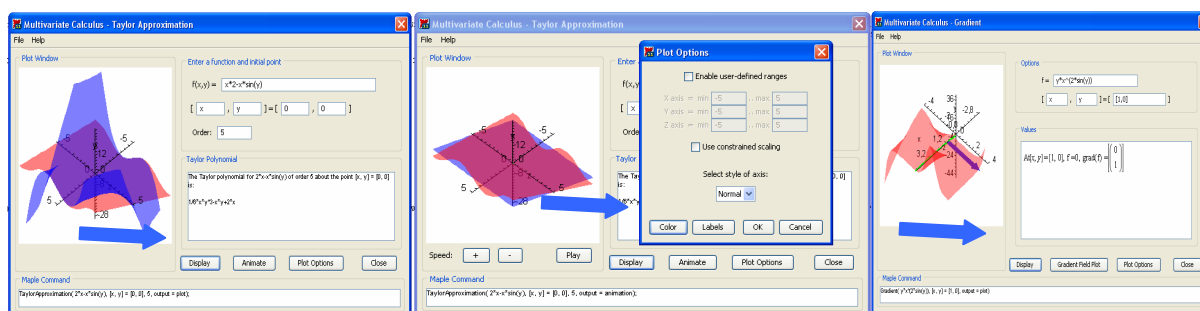
- ▶ **Dokument/Zápisník**, jeho tvorba a prezentace prostředky Maple, **obslužnost pomocí klikacího kalkulu** (samotné výpočty a grafické výstupy lze upravovat dalšími příkazy, prokládat textem, doplňovat referencemi a odkazy s možnostmi dokumentace, osobních komentářů, anotacemi, přirozenými zápisy matematických výrazů, lze využívat oblíbených palet nástrojů, interaktivních matematických tutorů a předdefinovaných asistentů, číselné výstupy formátovat i automaticky převádět do potřebných jednotek, přitom sekvence úkonů, analýz, výpočtů a vizualizací lze široce i vícevrstevně strukturovat, algoritimizovanou problematiku lze programovat na bázi principů obdobných jako platí v jazyce Pascal).



Obrázek 5: Příklad vytvořeného *Zápisníku* prostřednictvím prostředků Maple, ukázky oblíbených palet nástrojů (výrazů, symbolů, operátorů, kresličů, abeced, rozpoznávače)



Obrázek 6: Příklad vytvořeného dokumentu prostředky systému Maple, ovladače v lištách



Obrázek 7: Ukázky tzv. interaktivních *Smart* dokumentů – možnost snadné modifikace, animace, nastavení parametrů pro vizualizaci, vymezení rozsahu výstupů, popis realizovaných akcí a operací, spouštění krok po kroku apod.

- ▶ **Maple 12 pro studenty** - od počátku vývoje systému Maple je jeho nosnou linií silná podpora všestranného matematického vzdělávání. *Maple Student Help centre* reflektuje současný životní styl a potřeby studentů zařazováním produktů, např. tréninkových demo-videí, Mapletů s řešenými úlohami, v *Maple Student fóru* pak on-line matematických diskusí, dotazů a odpovědí, kalkulátoru pro rychlé odpovědi, dále poskytnutím matematických zdrojů pro vypracování domácích úloh, zohledněním zázemí různých stupňů matematických znalostí apod.
- ▶ Verze Maple 12 je schopna nabídnout i řadu žádaných moderních inženýrských a vědeckých metod při vývoji i výzkumu. Například zařazený⁵ jsou komponenty pro sledování vlivu parametrů na výpočet (*Exploration Assistant*), dynamické systémy pro analýzu a grafickou vizualizaci lineárních časových úloh (*Dynamic Systems*), je rozšířena knihovna o další možnosti transformace diskrétních veličin (*Discrete Transforms*), je přidána komponenta pro přímé propojení s počítačově

⁵ Zdroj: <http://www.maplesoft.cz>; <http://www.maple.vladimirzak.com>

podporovanými systémy (*CAD Connectivity*) a zkvalitněný převod existujícího kódu MATLAB do kódu Maple (*MATLAB to Maple Code Translation*). Výraznou a živě diskutovanou inovací verze Maple 12 jsou nové možnosti pro simulaci samostatným produktem (*MapleSim*). Maple 12 nově nabízí a vylepšuje interaktivní matematické nástroje (*Clickable Math*) a interaktivní inženýrské nástroje (*Clickable Engineering*). Tyto nové možnosti systému lze nalézt na adrese (<http://www.maplesoft.com/products/Maple/demo/>), kde jsou všechny informace v přehledné podobě uvedeny.

2 MALÝ MAPLE-MANUÁL (MMM) PRO EKONOMICKÉ MODELOVÁNÍ

PRACOVNÍ PROSTŘEDÍ MAPLE

Již výše bylo zmíněno že, nástroje a prostředí současné verze systému Maple jsou pracovně velmi přátelské a jejich ovládání vstřícné vůči logickému vedení řešení úloh, přirozenému matematickému zápisu i intuitivnímu přístupu k obsluze systému, proto nemá smysl zpracovávat podrobný a systematický manuál pro jeho zvládnutí, toho dosáhneme nejlépe vlastními zkušenostmi při jeho používání řešením konkrétních problémů v Maple. Důležité je pochopit filozofii systému.

Poznamenejme: V celém tomto odstavci grafy, jako přímé výstupy prezentovaných příkazů v Zápisníku/Dokumentu, nejsou označovány popisky; označovány jsou pouze obrázky.

Dále tzv. „*dobře míněné rady*“ a upozornění jsou včleňovány do textu kurzívou, proto je dobré MMM procházet postupně.

ZÁPISNÍK

Zápisník slouží nejen k výpočtům a vizualizacím, ale i k běžnému textu, kterým budeme prováděné akce komentovat.

- ▶ K tomu je zabudována v horní části pracovního okna **prostřední lišta** s přepínačem pro *psaní textu* (**T**) a pro příkazový řádek pro provedení akce v Maple (**[<**).

[> zobáček v hranaté závorce je začátek příkazového řádku,
dvojkřížek za příkazem uvozuje zápis komentáře přímo v příkaze.

Tato lišta dále obsahuje některé známé z jiných systémů či intuitivně pochopitelné ikony pro ovládání pracovního prostředí.

- ▶ **Spodní lišta** v horní části okna je složena ze dvou řádků: na spodním jsou intuitivně rozpoznatelné nabídky pro formu zápisu textu (obdobně jako např. ve Windows), na horním řádku je přepínač pro příkazy (**Math**) a text (**Text**). Při spuštění Zápisníku je automaticky nastaven režim příkazových řádků. Pokud chceme psát text, musíme přepnout režim kliknutím myši na ikonu textu. Vedle vpravo jsou zastoupeny další rychlé ovladače.

Například klikneme-li na obrázek vytvořený v Zápisníku, aktivuje se ovladač (**Plot**) a na liště se objeví a aktivuje rozšířená podnabídka pro operativní manipulaci s grafem (tyto modifikace však lze provádět rovněž přímo v příkazových řádcích či stisknutím pravého tlačítka na myši při poloze kurzoru na

Téhož výsledku, totiž že si jej přejeme jako desetinné číslo, dosáhneme přidáním desetinné tečky k některému ze vstupujících čísel v příkaze (pak Maple sám volí automaticky počet desetinných míst).

> 2+1/5.;

2.20000000

Příkazy lze psát i za sebe na řádek, ale je třeba je oddělovat středníkem nebo dvojtečkou (zde := je obvyklý **přiřazovací příkaz**), přičemž vyhodnocování se provádí stejně, jak bylo výše popsáno.

> R:=21/7;P:=R-1;

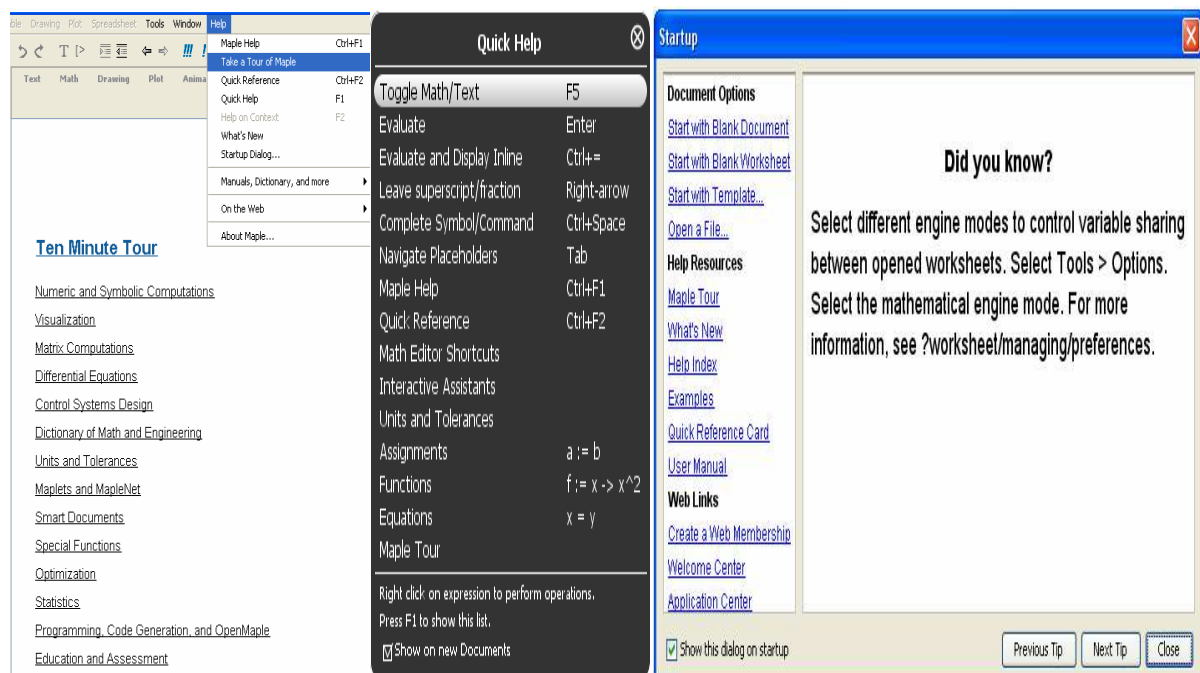
R := 3

P := 2

- ▶ V **nejvyšší liště** jsou opět obvyklé nabídky, přičemž důležitou je zejména roleta (**Help**) nápověda, k níž se ale lze dostat i pomocí Ctrl+F2, Ctrl+F1, F1. Jiná varianta nápovědy je, že na příkazový řádek napíšeme ? a za něj termín, který nás zajímá, pak stiskneme Enter.

?plot

Výhodou nápovědy v Maple je, že v dolní části napovídajícího okna jsou velmi často uvedeny přímo příklady příkazů, které je možné „přetahovat“ do svého vlastního pracovního okna. *Pozor na ztrátu některého symbolu při přenosu.*

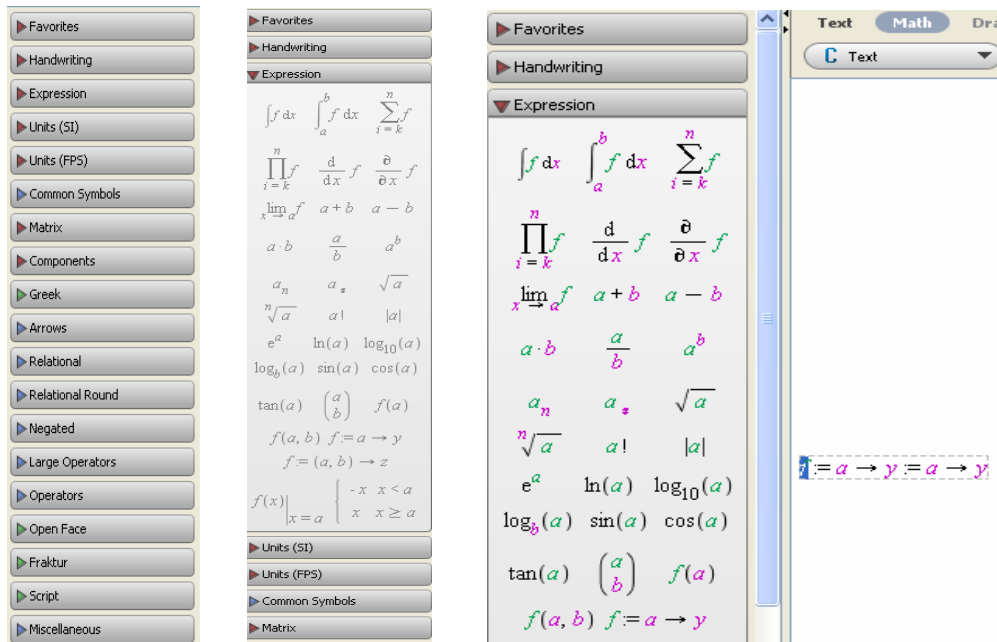


Obrázek 9: Různé typy nápovědy v Maple

Příkazový řádek můžeme také iniciovat v textovém režimu aktivací ovladače (**Math**), poznáme jej podle toho, že na řádku namísto zobáčku v hranaté závorce aktivně pulzuje přerušovaný rámeček, kam můžeme přetahovat nástroje z **palet nástrojů**, které jsou vlevo, příp. vpravo pracovního okna nebo zapisovat příkazy, příp. pomocí pravého tlačítka myši interaktivně modifikovat obrázky apod. *Prozkoumejte, co nabízí pravé tlačítko v myši, práce*

s ním přispívá k pohodlí. Příkazový řádek v textovém režimu je méně výrazný, než ten, který začíná [$\>$].

Palety lze otevřít kliknutím na šipku, která změní její směr a zavřít opět kliknutím na šipku. Vybraný nástroj myši přetáhneme do pracovního okna. Často používané (oblíbené) nástroje lze umístit do nejvyšší palety (**Favorites**). Je vhodné projít, co všechny palety nabízejí, a případně jejich sestavu rozšířit o další.



Obrázek 10: Obsluha klikacím kalkulem z palet nástrojů

Klikáním a automatickým "poskakováním" kurzoru po barevných symbolech v tomto výrazu dopisujeme z klávesnice žádané hodnoty a necháme provést Maple akci stisknutím Enter.

$$\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[3]{8};$$

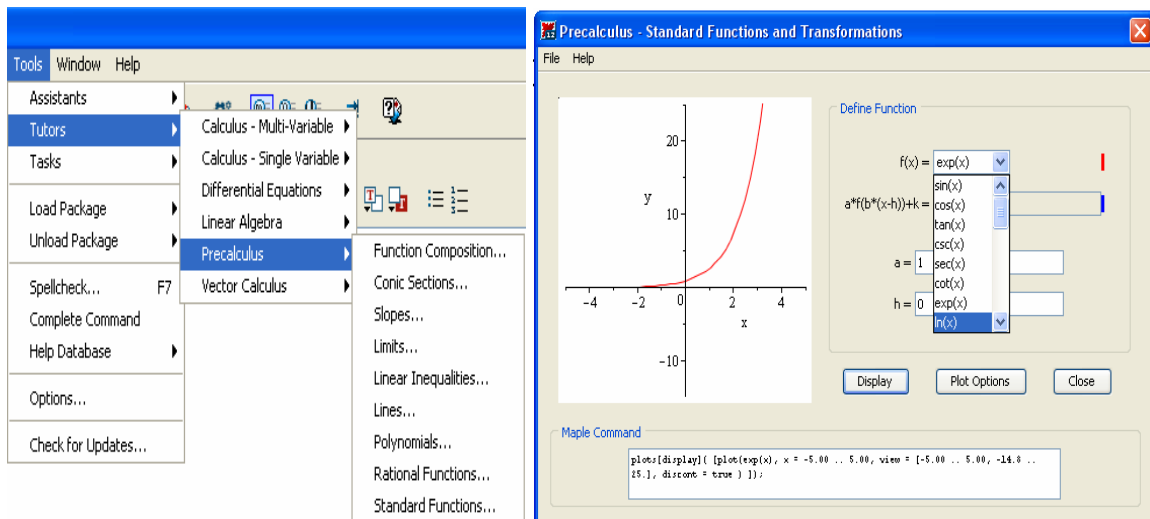
$$\sqrt[3]{8.};$$

$$8^{1/3}$$

$$2.000000000$$

Dále v horní liště zmiňme ovladač (**Tools**), který je prostředníkem pro pohodlné využití předdefinovaných asistentů, tutorů, příkladů, otevírání knihoven aj. v různých oblastech matematiky. Tak lze provádět výpočty, vizualizace a jiné akce vyvoláním interaktivního pomocníka, nebo navíc jeho řízením.

Ovladačem (**Insert**) kromě jiného lze Zápisník strukturovat. Ovladač (**View**), mimo jiné člení Zápisník vkládáním poznámek, může rozšířit pracovní okno o další palety nástrojů, pracuje s popisovanými lištami (**Toolbar**, **Status Bar**, **Context Bar**) aj.



Obrázek 11: Cesta k interaktivnímu tutorovi pro vykreslení grafu funkce

ZÁPISY A VLASTNOSTI VYBRANÝCH PŘÍKAZŮ, VÝRAZŮ A SYMBOLŮ

- Symbol % zastupuje poslední vyhodnocený výraz (pozor však na pořadí, v němž byly příkazy vyhodnoceny, například v případě, že vkládáme dodatečně příkaz nad řádek, který byl již vyhodnocen). Symbol % lze užít až trojnásobněkrát %%%.

$$a := 3!; \tag{1}$$

6

$$b := 2!; \tag{2}$$

2

$$\sqrt{\%}; \tag{3}$$

$\sqrt{2}$

Bylo řečeno, že záleží na pořadí provádění příkazů. Nyní zopakujme příkazy (1), (2), (3) ale tak, že nejprve zaktivujeme (2), teprve poté nad něj dodatečně zařadíme a zaktivujeme příkaz (1) (jako bychom při psaní na něj zapomněli), poté nakonec provedeme příkaz (3).

$$a := 3!$$

6

$$b := 2!;$$

2

$$\sqrt{\%};$$

$\sqrt{6}$

Je vidět, že jsme obdrželi jiný výsledek, než bychom podle vzhledu Zápisníku očekávali.

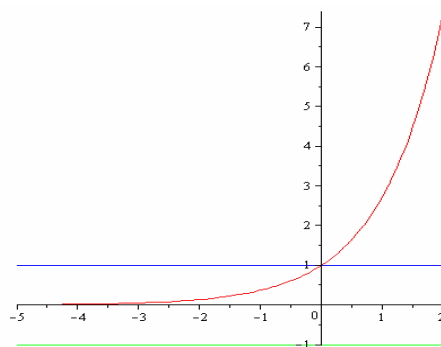
- Typ **závorek** hraje důležitou úlohu:

[] slouží pro výčet prvků v pevném pořadí (seznam prvků) nebo indexaci prvků v poli.

$$c[1, 1], d[1, 1];$$

$c_{1,1}, d_{1,1}$

```
plot([exp, 1,-1], -5..2, color = ["red", "blue", "green"]);
```



Mimochodem klikněte (levým) tlačítkem myši na graf a povšimněte si, co se objevilo na horní liště a k čemu to slouží. A zkuste ještě jednou kliknout na graf tentokrát pravým tlačítkem myši a porovnejte. Tyto možnosti rychlých úprav slouží k případným doplňujícím či dodatečným změnám. (Příkaz lze také samozřejmě změnit přímo v příkazovém řádku.)

{ } slouží pro „množinový“ zápis (Maple sám prvky seřadí).

```
A := { 4, 7, 9, 6 };
```

```
{4, 6, 7, 9}
```

() slouží v běžných přirozených zápisech pro uzávorkování, např. při označování argumentů, naznačování, priorit prováděných operací apod. (U některých výrazů je podíl lépe **uzávorkovat**; vždy nutno uzávorkovat exponenty a argumenty funkcí.)

< > slouží pro zápis sloupcových a řádkových vektorů nebo pro určitou formu zápisu matic.

```
< 10, - 2, 14, 21 >;
```

```
[ 10
 -2
 14
 21 ]
```

- Pozor, v Maple mají některé symboly předdefinovanou úlohu a lze je k jiným účelům využívat pouze předchozím přechodným přejmenováním.

Někdy je třeba **zbavit výraz hodnoty**, který si „drží“.

```
x := 'x';
```

```
x
```

- Některé **frekventované konstanty** lze použít buď jejich vypsáním v předdefinované formě (což lze zjistit v nápovědě), nebo si je lze stáhnout z palety nástrojů. Pozor na **malá a velká písmena**, Maple na ně citlivě reaguje.

```
π; exp(1); ∞; Exp(1);
```

```
π
```

```
e
```

```
∞
```

```
Exp(1)
```

- ▶ Často je třeba získaný výraz **upravit**. V Maple existuje řada "úpravných" příkazů. Vyberme příkaz pro zjednodušení a pro součin kořenových činitelů.

$$\text{simplify}\left(\frac{15(x^2 - 1)}{3x - 3}\right);$$

$$5x + 5$$

$$\text{factor}(x^2 - 2 \cdot x + 1);$$

$$(x - 1)^2$$

- ▶ **Výrazy s exponenty** se vyjadřují vesměs pomocí **^** a **násobení** pomocí *****, které buď získáme z anglické klávesnice nebo opět přetažením z příslušné palety nástrojů.
- ▶ Zápis **vektoru** a **malice** může být proveden několika způsoby. Rovněž i pomocí klikání přetažen/a z palety nástrojů.

$$M := \text{array}(1..2, 1..4, [[1, -1, 0, 2], [1, 2, 7, 12]]);$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\langle 10, -2, 14, 21 \rangle;$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix}$$

- ▶ V Maple mají rovněž svá **předdefinovaná jména některé funkce a objekty**. (Viz **?initialfunctions**). Lze je do pracovního okna přetáhnout i z palety nástrojů. (Trigonometrické funkce jsou zadávány v radiánech, převod lze provést příkazem **degrees** a **radians**.)

$$\sin(x); \tan(x); \exp(x); \ln(x); \text{sgrt}(x); \text{abs}(x);$$

$$\sin(x)$$

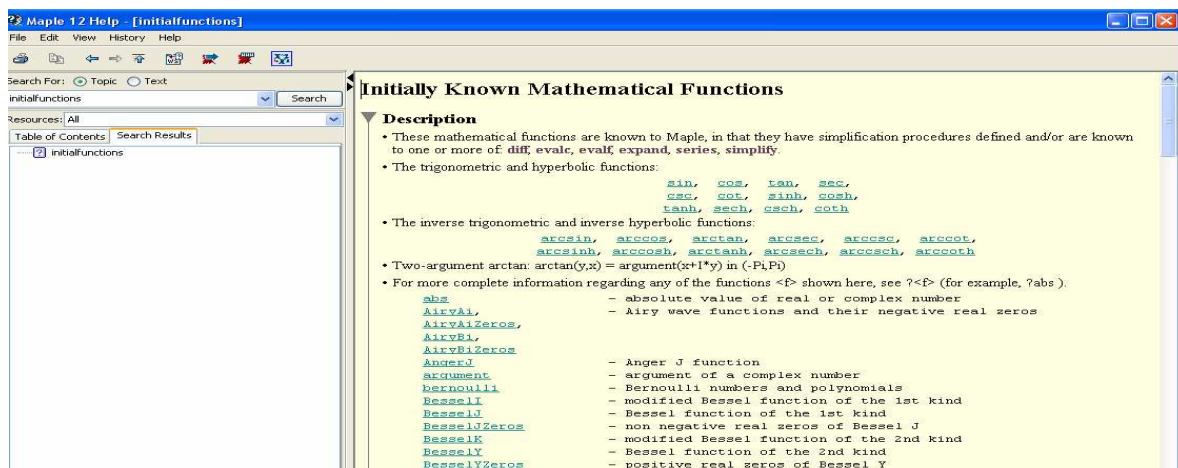
$$\tan(x)$$

$$e^x$$

$$\ln(x)$$

$$\text{sgrt}(x)$$

$$|x|$$



Obrázek 12: Návod pro předdefinované objekty

Zápis **nepředdefinovaných funkcí a vyčíslení jejich hodnoty** lze provést např. pomocí vypsání příkazu jako procedury nebo zkonstruovat přetažením z palety nástrojů.

$Q := \text{proc}(P) - P^2 + 3 * P + 8 \text{ end};$

$\text{proc}(P) - P^2 + 3 * P + 8 \text{ end proc}$

$Q(0);$

8

$f := x \rightarrow x^3 - 2 \cdot x + 1;$

$x \rightarrow x^3 - 2x + 1$

$f(1);$

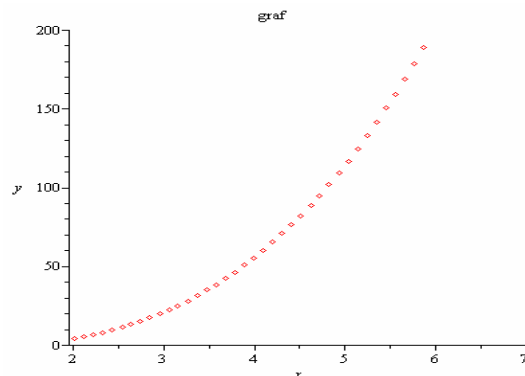
0

GRAF FUNKCE

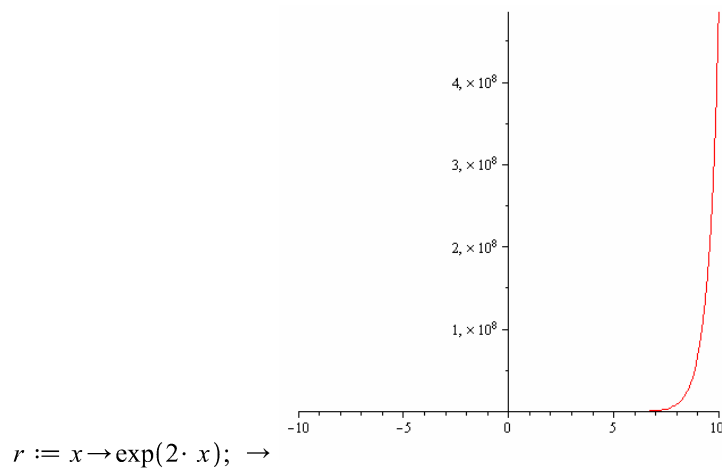
- Kreslení **grafu funkce** lze přizpůsobit potřebám a v příkaze dodefinovat dílčí podrobnosti. Dodatečně je lze změnit klikáním, jak bylo výše řečeno.

$\text{with}(plots) :$

$\text{plot}(f(x), x = 2 .. 7, y = 0 .. 200, \text{color} = \text{red}, \text{title} = \text{"graf"}, \text{style} = \text{"point"});$

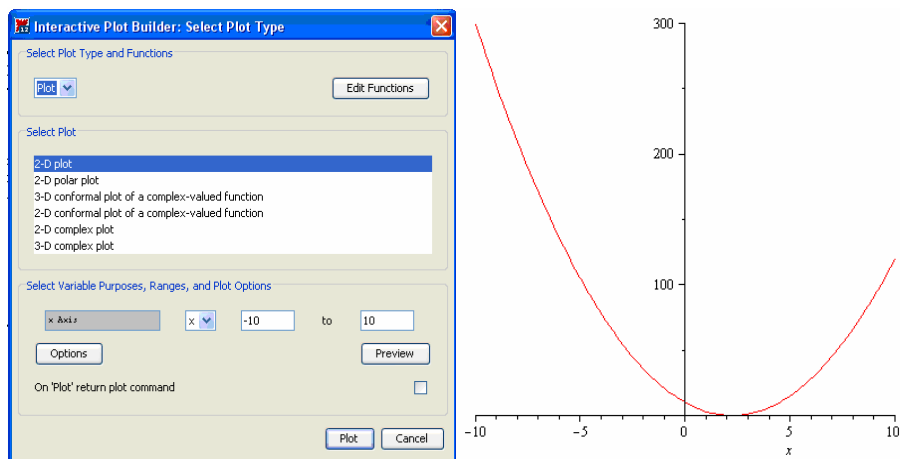


- Další možnost vykreslení grafu funkce je využít **pravého tlačítka myši**. Po napsání jejího předpisu kliknout na tento předpis a vybrat z nabídky „kreslení“.



- Dále lze graf funkce vykreslit pomocí **interaktivního pomocníka** při vložení **[interaktive]** do příkazu. Maple nabídne volbu různých charakteristik pro kresbu grafu.

`plots[interactive](2*x^2 - 9*x + 10);`



Obrázek 13: Kreslení grafu interaktivně

- Chceme-li **více funkcí zakreslit do jednoho obrázku**, máme opět několik možností. Využijeme-li příkazu **display**, je předem nutno otevřít knihovnu **plots**. Funkce lze zadat jako seznam nebo množinu. Promyslete v následujících příkladech jednotlivé reakce systému.

(Před užitím mnohých příkazů je totiž nutné otevřít příslušnou **knihovnu**. V nápovědě si můžete prohlédnout další knihovny `stats`, `linalg`, `student` aj. a jejich varianty zápisů.)

Při otvírání nové knihovny můžeme, a často je vhodné, systém restartovat příkazem **restart**.

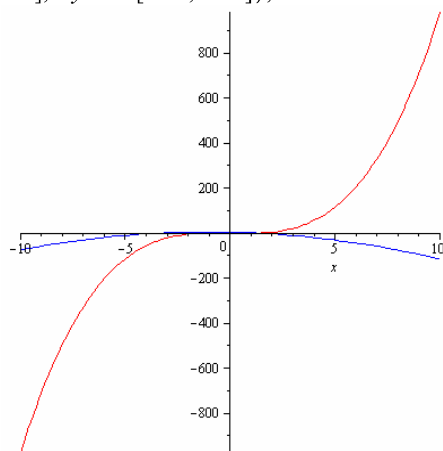
`f := x → x^3 - 2 · x + 1;`

$$x \rightarrow x^3 - 2x + 1$$

`g := x → -x^2 - 2 · x + 5;`

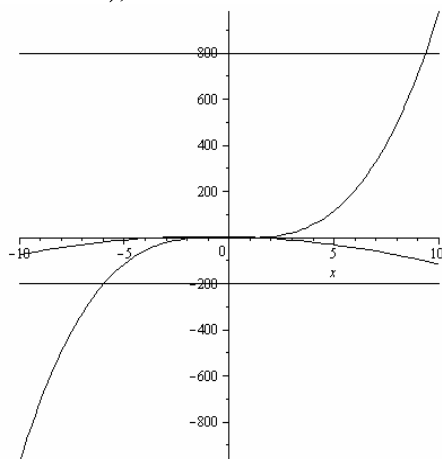
$$x \rightarrow -x^2 - 2x + 5$$

`plot([f(x), g(x)], color = [red, blue], style = [line, line]);`



V dalším obohatíme obrázek ještě například o dva grafy konstantních funkcí $h(x) = 800$ a $j(x) = -200$.

```
plot({f(x), g(x), -200, 800}, color = black );
```



```
with(plots) :
```

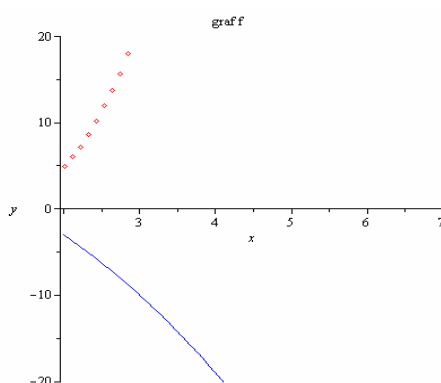
```
f1 := plot(f(x), x = 2..7, y = -20..20, color = red, title = "graf f", style = point);
```

PLOT(...)

```
g1 := plot(g(x), x = 2..7, color = blue, title = "graf g", style = line);
```

PLOT(...)

```
plots[display](f1, g1);
```



INVERZNÍ FUNKCE

- Často je třeba pracovat s **inverzní funkcí k dané funkci**. Maple si poradí s funkcí ke které inverzní funkce existuje a která je zadaná předpisem, dokonce pokud k dané funkci inverzní neexistuje, pokusí se rozdělit například definiční obor původní funkce tak, aby vydal příslušné „větve“ dílčích funkcí inverzních. Pokud jde o funkci předdefinovanou, zjednoduší příkaz a sám si ji v knihovně funkcí vyhledá (automaticky provede formální záměnu proměnných, *pozor, to může být při některých aplikacích nežádoucí, pak proto je nutno přeznačit proměnné dle jejich věcného obsahu*).

```
f := x →  $\frac{x}{2} - 12$ ;
```

$x \rightarrow \frac{1}{2}x - 12$

```
solve(f(inv f) = x, inv f);
```

$24 + 2x$

$g := x \rightarrow -x^2 + 2;$

$$x \rightarrow -x^2 + 2$$

$\text{solve}(g(\text{inv}g) = x, \text{inv}g);$

$$\sqrt{2-x}, -\sqrt{2-x}$$

$\text{invfunc}[\ln];$

exp

Inverzní funkci lze například spočítat i následující sekvencí příkazů (zde není provedena formální záměna proměnných).

$Q := \text{proc}(P) - 14 * P + 9 \text{ end};$

proc(P) - 14 * P + 9 end proc

$\text{solve}(Q = Q(P), P);$

$$-\frac{1}{14} Q + \frac{9}{14}$$

ROVNICE, NEROVNICE, JEJICH SOUSTAVY

- Pokud je třeba číselně vyhodnotit daný výraz, řešit **rovnici** či **nerovnici** (nebo jejich **soustavu**), lze k tomu použít příkazu **solve**.

$\text{solve}(3^x - 2 = 15, x);$

$$\frac{\ln(17)}{\ln(3)}$$

$\text{evalf}(\%);$

2.578901922

$\text{solve}(3^x - 2 > 15, x);$

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{\ln(17)}{\ln(3)}\right), \infty\right)$$

$\text{evalf}(\%);$

$\text{RealRange}(\text{Open}(2.578901922), \infty)$

Poznamenejme: Všimněte se zápisu intervalů v Maple.

Další možnost výpočtu je opět pomocí procedury.

$K := \text{proc}(P) - P/5.3 \text{ end};$

proc(P) (-1) * P/5.3 end proc

$\text{solve}(K(P) = 1);$

-5.300000000

$\text{solve}(\{K(P) > 1, P > -10\}, P);$

$\{-10. < P, P < -5.300000000\}$

Jde-li o **soustavu rovnic**, užijeme obdobně příkazu **solve**.

$\text{solve}(\{15 * x + 6 * y - z = 4, x + y + 2 * z = 1, x - 7 * y + 2 * z = 0, \}, \{x, y, z\});$

$$\left\{x = \frac{59}{248}, y = \frac{1}{8}, z = \frac{79}{248}\right\}$$

$\text{evalf}(\%);$

$\{x = 0.2379032258, y = 0.1250000000, z = 0.318548387\}$

MATICE A DETERMINANTY

- ▶ O zápisu **matice** a **vektoru** jsme se již výše zmínili. Nyní ukažme některé **operace s maticemi**. K operacím s maticemi musíme otevřít knihovnu **linalg**.

Nejprve zadáme matice.

```
A := matrix(3, 3, [45, 70, 25, 30, 31, 20, 20, 25, 10]);
```

$$\begin{bmatrix} 45 & 70 & 25 \\ 30 & 31 & 20 \\ 20 & 25 & 10 \end{bmatrix}$$

```
B := matrix(3, 1, [640, 417, 265]);
```

$$\begin{bmatrix} 640 \\ 417 \\ 265 \end{bmatrix}$$

- ▶ Nyní otevřeme příslušnou knihovnu a vypočítáme **determinant** z matice A, jehož hodnotu přiřadíme proměnné C.

```
C := linalg[det](A);
```

1700

- ▶ A dále vypočítáme **inverzní matici** k dané matici (existuje, protože determinant je nenulový).

```
Ainv := linalg[inverse](A);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{19}{170} & -\frac{3}{68} & \frac{25}{68} \\ \frac{1}{17} & -\frac{1}{34} & -\frac{3}{34} \\ \frac{13}{170} & \frac{11}{68} & -\frac{141}{340} \end{bmatrix}$$

- ▶ Nakonec vypočteme **součin matic** (inverzní matice k matici A a vektoru B).

```
evalm(Ainv&*B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Totéž lze učinit stisknutím **pravého tlačítka myši na zapsaný příkaz**, obdržíme výsledek i s komentářem.

```
X := evalm(Ainv&*B); evaluate as matrix  $\begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$ 
```

```
evalf(%);
```

$$\begin{bmatrix} 7.500000000 \\ 2. \\ 6.500000000 \end{bmatrix}$$

DERIVACE

- ▶ Pro užití metod matematiky v ekonomii je nezbytná **derivace**, případně **vyšší derivace funkce**. V zápise je třeba respektovat **velké/malé písmeno** na začátku příkazů **Diff/diff**. (Z příkazu to pochopíte.)

$$\text{Diff}\left(\frac{\text{sqrt}(x^2-4)}{x-2}, x\right) = \text{diff}\left(\frac{\text{sqrt}(x^2-4)}{x-2}, x\right);$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}(x-2)} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{(x-2)^2}$$

Výraz zjednodušte.

simplify(%);

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{x^2-4}(x-2)}$$

Je vidět, že velké *D* v příkaze *Diff* hraje roli označení. Je to písmeno, které má svou „funkci“ a je součástí knihovny **Student**, kde se o jeho použití dozvíte více informací.

- ▶ **Vyšší derivace funkce** vypočítáme obdobně.

$$\text{Diff}(7 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 1, x, x, x, x) = \text{diff}(7 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 1, x, x, x, x);$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(7x^4 - 4x + 1) = 168$$

- ▶ Chceme-li určit **hodnotu** například **derivace v konkrétním bodě**, užijeme příkazu **subs**. Tento příkaz lze použít i při vyčíslení jiného výrazu.

$$A := \text{Diff}(7 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 1, x, x) = \text{diff}(7 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 1, x, x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(7x^4 - 4x + 1) = 84x^2$$

$$\text{subs}(x=2, A)$$

$$\text{Diff}(105, 2, 2) = 336$$

(A tak máme také v ruce nástroje pro vyšetřování průběhu funkce.)

EXTRÉMY

- ▶ Pro přímé určení **extrémů funkce** jsou vyhrazeny příkazy **minimize** a **maximize** (v Maple lze určit extrémy i jinými, „postupnými“, cestami).

$$g := ((3x^4 - 4x^3 - x)/2);$$

$$\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x$$

minimize(%);

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} 2^{2/3} + \frac{1}{6} 2^{1/3} + \frac{1}{3} \right)^4 - 2 \left(\frac{1}{3} 2^{2/3} + \frac{1}{6} 2^{1/3} + \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{6} 2^{2/3} - \frac{1}{12} 2^{1/3} - \frac{1}{6}$$

`evalf(%);`

`-1.01891550`

Je tedy určena minimální hodnota dané funkce.

`g := ((3 x^4 - 4 x^3 - x)/2)`

$$\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x$$

`maximize(%)`

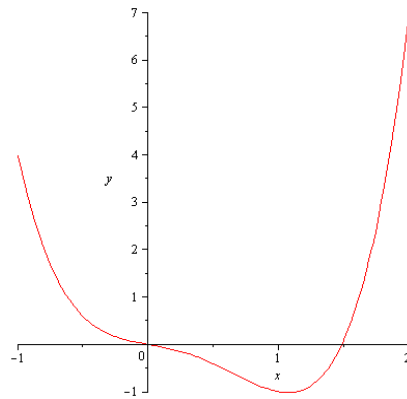
`∞`

Je tedy určeno, že funkce roste nade všechny meze.

Pozor na užití %, pokud před aktivací příkazu `maximize` bychom totiž byli znovu nenačetli zkoumanou funkci, vyhodnotila by se poslední vypočítaná hodnota, tedy `-1.01891550`.

Udělejme kontrolu vizualizací.

`plot((3 x^4 - 4 x^3 - x)/2, x=-1..2);`



Chceme-li navíc identifikovat body, v nichž k extrému dochází, příkazy `minimize` a `maximize` musejí obsahovat i druhý argument. Otevřeme knihovnu **Optimization**.

`restart : with(Optimization) :`

`g := ((3 x^4 - 4 x^3)/2);`

$$\frac{3}{2}x^4 - 2x^3$$

`minimize(% , location);`

$$-\frac{1}{2}, \left\{ \left[\{x=1\}, -\frac{1}{2} \right] \right\}$$

`g := ((3 x^4 - 4 x^3)/2);`

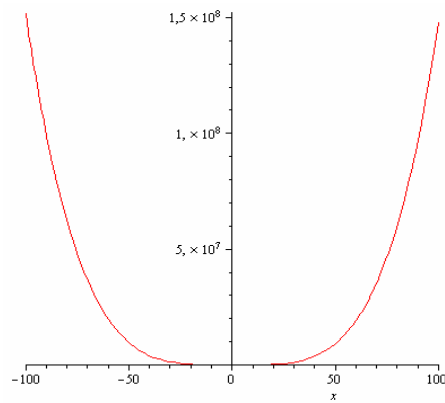
$$\frac{3}{2}x^4 - 2x^3$$

`maximize(% , location);`

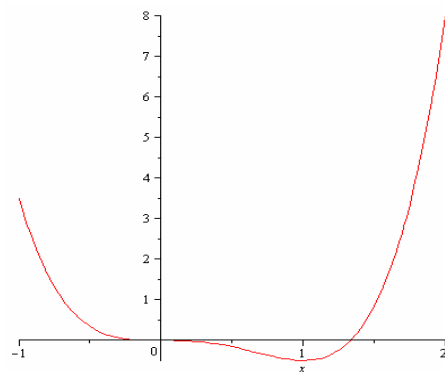
`∞, {[x = ∞], ∞}, [{x = -∞], ∞}`

Proveďme interaktivně rychlou kontrolu vykreslením grafu při různých měřících.

`plots[interactive]((3 x^4 - 4 x^3)/2);`



`plots[interactive]((3 x^4 - 4 x^3)/2);`



Pro určení tzv. **největší a nejmenší hodnoty** (globální extrémů) stačí dopsat v příkazu příslušný interval, tj. rozsah proměnné x .

INTEGRÁL

- Výpočet **neurčitého a určitého integrálu**. Povšimněte si, že neurčitou konstantu v neurčitém integrálu Maple neuvádí. *Je nutno ji však na závěr uvažovat zejména v aplikacích.*

`int((3 * P^2 + 2)/(P^3 + 2 * P + 3), P);`

$$\ln(P^3 + 2P + 3)$$

`int((1 + (cos(x))^2)/(2 * (cos(x))^2), x);`

$$\frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{2} x$$

Povšimněte si zápisu mezí u určitého integrálu.

`int(x^2 + 2, x = -1 .. 1);`

$$\frac{14}{3}$$

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Pro **funkce více proměnných** v Maple platí obdobná pravidla jako pro funkce jedné proměnné.

- Výpočet **parciálních derivací a vyšších parciálních derivací** lze opět realizovat více způsoby, příkazem i přetažením výrazu z palety nástrojů.

`f := proc(x,y) x^2 + x*y^3 end;`

`proc(x,y) x^2 + x*y^3 end proc`

`fx := diff(f(x,y), x);`

$$2x + y^3$$

`fy := diff(f(x,y), y);`

$$3xy^2$$

`fxx := diff(f(x,y), x, x);`

$$2$$

`fyx := diff(f(x,y), y, y);`

$$6xy$$

`fyx := diff(f(x,y), x, y);`

$$3y^2$$

`z := x^2*y^4; Diff(z, x) = diff(z, x); Diff(z, y) = diff(z, y);`

$$x^2 y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^4) = 2x y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y^4) = 4x^2 y^3$$

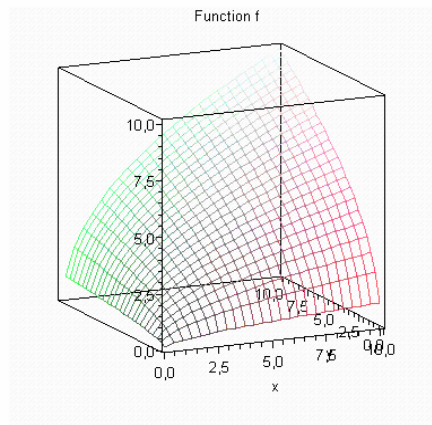
► Nyní vykreslíme **graf funkce dvou proměnných**. Otevřeme knihovnu **plots**.

`restart : with(plots) :`

`f := x^(1/2)*y^(1/2);`

$$\sqrt{x} \sqrt{y}$$

`plot3d(f, x = 0.1 ..10, y = 0.1 ..10, axes = boxed, orientation = [-133, 65], style = wireframe, title = "Function f");`



► Pro hledání **extrémů funkce dvou proměnných**, otevřeme knihovnu **Optimization**.

`restart : with(Optimization) :`

`minimize(x^3 - 2*y - x + 3*y + 3, location);`

$$-\infty, \{ \{x = -\infty, y = -\infty\}, -\infty \}$$

`maximize(-x^2 + 3*y - y^2 - 3*x - 1, location);`

$$\frac{7}{2}, \left\{ \left\{ x = -\frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} \right\}, \frac{7}{2} \right\}$$

Je vidět, že zadaná funkce v bodě $[-3/2, 3/2]$ nabývá svého maxima, a to $7/2$. V případě, že bychom chtěli určit **vázané extrém**y, museli bychom dodat do argumentu informaci o oblasti.

NUMERICKÉ METODY

- V **metodě nejmenších čtverců** uveďme například aproximaci kvadratickou funkcí. Otevřeme knihovnu **stats**.

Načteme naměřené hodnoty a proložíme kvadratickou funkcí.

with(stats) :

Qvalues := [1, 2, 3, 4, 5, 6];

[1, 2, 3, 4, 5, 6]

TRvalues := [0, 6, 14, 24, 30, 36];

[0, 6, 14, 24, 30, 36]

*eq_fit := fit[leastsquare [[Q, TR], TR = a*Q^2 + b*Q + c, {a, b, c}]]([Qvalues, TRvalues]);*

$$TR = -\frac{1}{7} Q^2 + \frac{297}{35} Q - \frac{46}{5}$$

Výsledný předpis kvadratické funkce:

evalf(%);

$$TR = -0.1428571429Q^2 + 8.485714286Q - 9.200000000$$

- V **metodě kubického spline** pro zajímavost uveďme i výsledný graf ze získaných vstupních údajů. Nejprve však ukažme výpočet dílčích polynomů třetího stupně (Popelková 2008).

with(plots) :

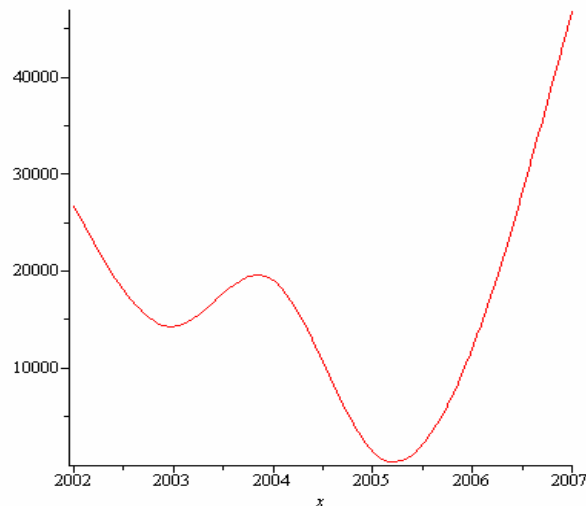
spline([2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007], [26735, 14249, 19071, 1335, 12078, 46922], x, cubic);

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1019366173995985}{19} + \frac{16802747154189}{209}x & x < 2003 \\ -\frac{762998418}{19}x^2 + \frac{1397433}{209}x^3 & \\ \frac{1426139883208593}{11} - \frac{40575713696913}{209}x & x < 2004 \\ + \frac{20253278436}{209}x^2 - \frac{3369793}{209}x^3 & \\ -\frac{30202067974335165}{209} + \frac{2378990624469}{11}x & x < 2005 \\ -\frac{22549384020}{209}x^2 + \frac{197355}{11}x^3 & \\ 37219920500190 - \frac{11628651490014}{209}x & x < 2006 \\ + \frac{5794492965}{209}x^2 - \frac{962454}{209}x^3 & \\ \frac{6588125831706742}{209} - \frac{9847737901530}{209}x & \text{otherwise} \\ + \frac{4906699551}{209}x^2 - \frac{814931}{209}x^3 & \end{array} \right.$$

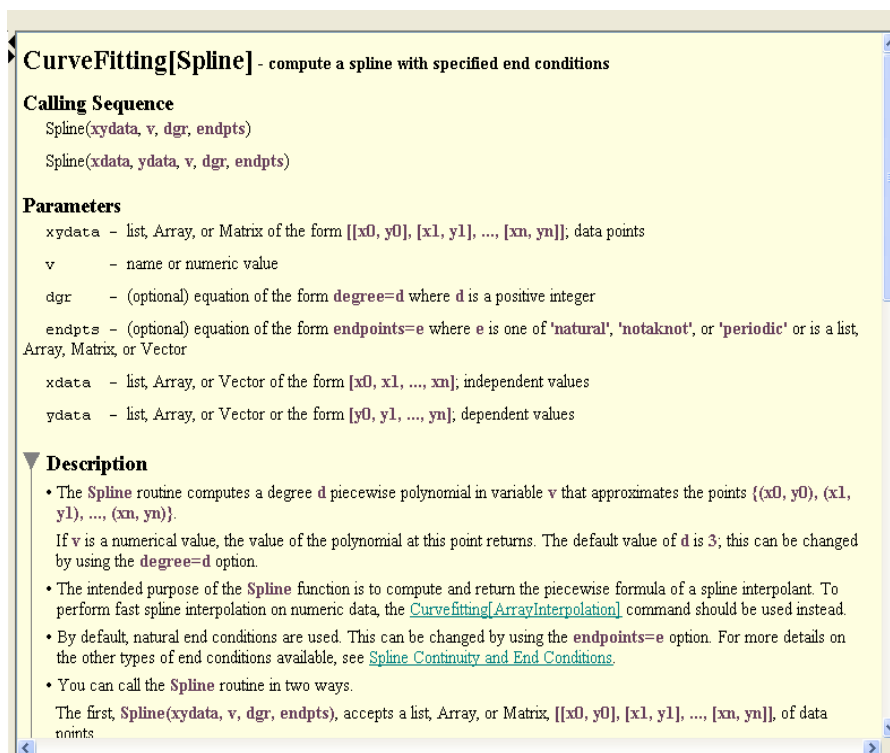
```
CF := proc (x) spline ([2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007], [26735,
14249, 19071, 1335, 12078, 46922], x, cubic) end;
```

```
CF := proc(x)
    spline([2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007], [26735, 14249, 19071,
1335, 12078, 46922], x, cubic)
end proc
```

```
plot(CF(x), x = 2002.. 2007);
```



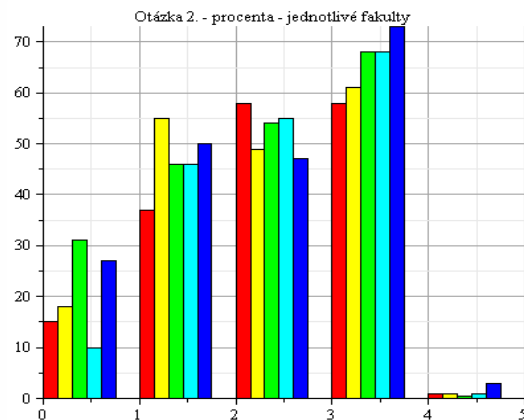
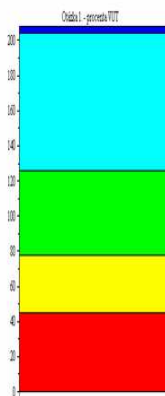
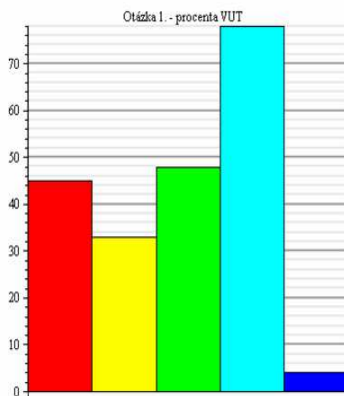
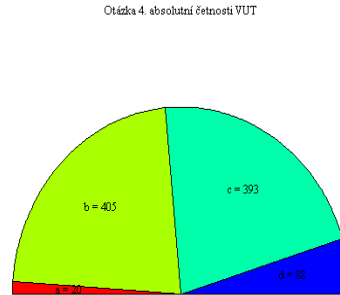
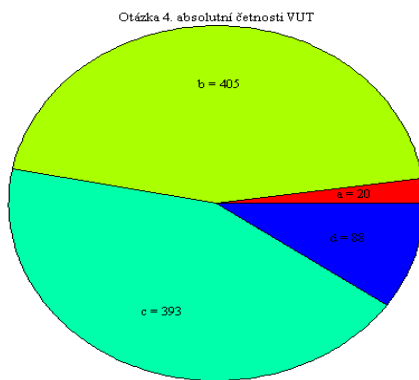
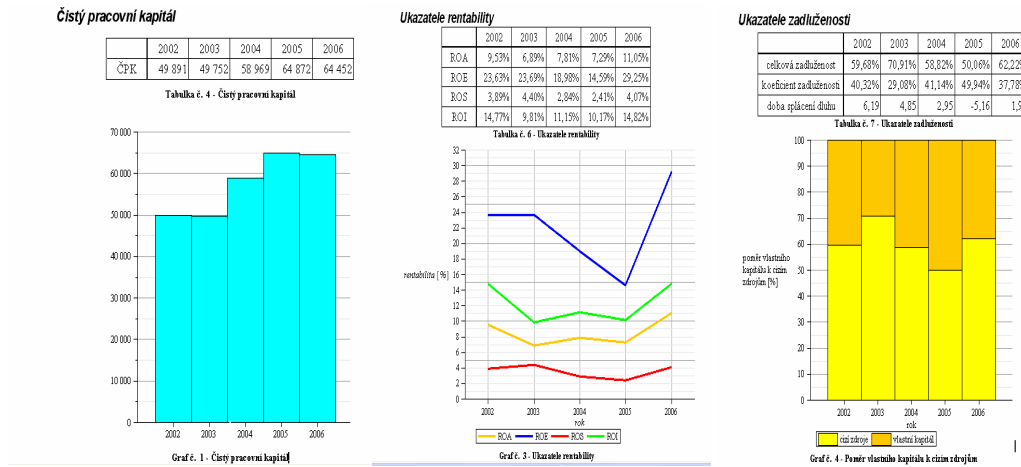
Maple obsahuje v nápovědě **slovník s výklady** struktur a objektů, např. pro spline jsou uvedeny informace o jeho konstrukci, zápisu příkazu, popis parametrů, další odkazy aj.



Obrázek 14: Podrobný popis spline v zabudovaném Maple slovníku

STATISTICKÉ METODY

- Uved'me některé možnosti grafických výstupů v Maple pro reprezentaci statistických dat (Vecheta 2008), (Chvátalová 2009).



Obrázek 15: Grafická reprezentace statistických dat

- **Regrese** (srovnejte s výpočtem v metodě nejmenších čtverců), výpočet pomocí předdefinované procedury vydá řadu charakteristik i pro statistickou diagnostiku.

with(Statistics) :

$X := \text{Vector}([1, 2, 3, 4, 5, 6], \text{datatype} = \text{float});$

$$\begin{bmatrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{bmatrix}$$

$Y := \text{Vector}([0, 6, 14, 24, 30, 36], \text{datatype} = \text{float});$

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 6. \\ 14. \\ 24. \\ 30. \\ 36. \end{bmatrix}$$

$\text{LinearFit}([1, t, t^2], X, Y, t);$

$$-9.200000000000000816 + 8.48571428571428754 t - 0.142857142857142960 t^2$$

$m := \text{LinearFit}([1, t, t^2], X, Y, t, \text{output} = \text{solutionmodule});$

module() export Results, Settings; end module

$m:\text{Results}()$

$$\text{"confidenceintervals"} = \begin{bmatrix} -1.7698002575075 \dots 5.6898002575075 \\ -2.2751372454828 \dots 2.6051372454828 \\ -0.23052749647804 \dots 0.45195606790662 \end{bmatrix}, \text{"residuals"}$$

$$= [-0.235714285714286016 \ 0.267142857142856904 \ 0.548571428571428708 \ -0.891428571428571237 \ 0.247142857142857276 \ 0.0642857142857140157],$$

$$\text{"leverages"} = [0.821428571428572285 \ 0.307142857142857328 \ 0.371428571428571330 \ 0.371428571428571219 \ 0.307142857142857050 \ 0.821428571428571841],$$

$$\text{"variancecovariancematrix"} = \begin{bmatrix} 1.37356190476190476 & -0.837014285714285600 & 0.107309523809523770 \\ -0.837014285714285600 & 0.587902891156462548 & -0.0804821428571428356 \\ 0.107309523809523770 & -0.0804821428571428356 & 0.0114974489795918334 \end{bmatrix}, \text{"internallystandardizedresiduals"}$$

$$\begin{aligned}
& \text{"variancecovariancematrix"} = \begin{bmatrix} 1.37356190476190476 & -0.837014285714285600 & 0.107309523809523770 \\ -0.837014285714285600 & 0.587902891156462548 & -0.0804821428571428356 \\ 0.107309523809523770 & -0.0804821428571428356 & 0.0114974489795918334 \end{bmatrix} \text{"internallystandardizedresiduals"} \\
& = \begin{bmatrix} -0.851394397843291628 \\ 0.489860687557643170 \\ 1.05610411939690318 \\ -1.71616919401996681 \\ 0.453186625387552833 \\ 0.232198472139077988 \end{bmatrix} \text{"externallystandardizedresiduals"} = \begin{bmatrix} -0.798257317827516742 \\ 0.416994351642328898 \\ 1.08794530190288196 \\ -10.3712309269033458 \\ 0.383380972298045630 \\ 0.191316224811659746 \end{bmatrix} \text{"CookDStatistic"} = \begin{bmatrix} 1.11147104504104965 \\ 0.0354585230523066162 \\ 0.219691315804430270 \\ 0.580122380796072923 \\ 0.0303479692422570259 \\ 0.0826714000443742326 \end{bmatrix} \text{"AtkinsonTStatistic"} \\
& = \begin{bmatrix} -1.71207121030050913 \\ 0.277637760733744964 \\ 0.836310206125236432 \\ -7.97242863136627556 \\ 0.255257737275188634 \\ 0.410327588921892916 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

► **Analýza rozptylu pro regresi ANOVA⁶ (je třeba otevřít knihovnu **Statistics**).**

with(Statistics) :

G1 := Vector([10, 11, 8], datatype = float);

$$\begin{bmatrix} 10. \\ 11. \\ 8. \end{bmatrix}$$

G2 := Vector([9, 9, 9, 11], datatype = float);

$$\begin{bmatrix} 9. \\ 9. \\ 9. \\ 11. \end{bmatrix}$$

G3 := Vector([10, 11, 7, 12], datatype = float);

$$\begin{bmatrix} 10. \\ 11. \\ 7. \\ 12. \end{bmatrix}$$

OneWayANOVA([G1, G2, G3]);

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.51515151515149 & 0.25757575757574 & 0.095104895104886 & 0.91029014915236 \\ 8 & 21.6666666666667 & 2.7083333333334 & NULL & NULL \\ 10 & 22.181818181818 & NULL & NULL & NULL \end{bmatrix}$$

⁶ Zdroj: <http://www.maplesoft.com>

ZÁVĚREM

Byly předvedeny účelově vybrané příkazy a techniky. Samozřejmě ve výčtu řady dalších lze pokračovat. Nejlépe povědomí o aplikacích výše zmíněných i dalších skutečnostech získá čtenář vlastní zkušeností a komunikací se systémem. Z důvodu přehledu byly použity nekomplikované výrazy a číselná vyjádření. I když přesnost výstupů v Maple můžeme sami zadat.

Je třeba si uvědomit, že v systému Maple existuje často i více možností k dosažení cíle. Je dobré zapojovat interaktivní pomocníky, využívat pravého tlačítka myši, komunikovat s lištami, umět navázat rychlý kontakt s nápovědou, s knihovny, s předdefinovanými funkcemi, plně využívat klikací klakul apod.

V případě, že použijeme v Maple předdefinované struktury, které mohou být nejednoznačně obecně definované, je potřebné nahlédnout do slovníku a ujasnit si, jak situaci Maple řeší (např. jak jsou v Maple ošetřeny okrajové podmínky apod.).

Zvýšený pozor je třeba dát při kopírování textů na to, aby se některý symbol „nezatoulal“, na korektní uzávorkování (počet levých a pravých závorek musí být týž) a na typ použitých závorek. V neposlední řadě je třeba upozornit na pořadí prováděných příkazů a na to, že Maple si „pamatuje“. Proto je vhodné restartovat pracovní plochu při hrozbě možnosti záměny hodnoty nějakého výrazu s již výše užitým.

Maple je rychlý a výborný spolupracovník, avšak osobní míra výpočtové i vizualizační intuice a logická komunikace uživatele s ním je vždy výhodou.

REFERENCE

Hřebíček J., Chvátalová Z. *Zvyšování výkonnosti podniku užitím systému Maple*. Sborník konference CQR Request 2008. Vyd. Centrum pro jakost a spolehlivost výroby a FSI VUT v Brně. Brno, 2008.

Hřebíček J., Žižka J. *Vědecké výpočty v biologii a v biomedicině*, Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita Brno. Brno, 2007.

Chvátalová Z. *Maple 11 in mathematics and econometrics as an interactive support for students*. In Proceedings of 7th International Conference APLIMAT 2008. Bratislava: Slovak University of Technology Bratislava. Bratislava, 2008.

Chvátalová Z. *Maple pro e-learning matematiky a matematických disciplín v ekonomických studijních programech*. In: *Časopis Trendy ekonomiky a managementu*, 2007, roč. 1, č. 1, Vyd. Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2007.

Chvátalová Z. *Využití Maple v závěrečných pracích na Fakultě podnikatelské VUT v Brně*. Sborník 30. konference o matematice na VŠTEZ 2008. Lázně Bohdaneč, 2008. Vyd. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha. Praha, 2008.

Chvátalová Z. *Přípravné materiály k dílčí zprávě projektu 2E08033 Získání a rozvinutí technických talentů ve spolupráci technických vysokých škol a průmyslových podniků* (řešitel Putnová A. a kol.) Brno: Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2009.

Popelková I. *Purpurové řeky. Matematické modelování výkonnosti podniku*. Diplomová práce, vedoucí práce Z. Chvátalová. Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2008.

Vecheta L. *Analýza prosperity firmy Tenza, a.s. užitím systému Maple*. Bakalářská práce, vedoucí práce Z. Chvátalová. Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2008.

Maplesoft [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.maplesoft.com>>

Maplesoft [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.maplesoft.cz>>

Maple [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/cas/>>

Maple [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.vladimirzak.com/sco2007.zip>>

Maple [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.umat.feec.vutbr.cz/~krupkova/>>